ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE
1982

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

(commune aux deux options)

Durée: 1 heure

N.B. Ce sujet comporte 2 pages de texte et 2 figures.

I

La figure (1) représente, relativement à un repère orthonormé les variations dans l'intervalle $[0,1]$ de la fonction f :

$$t \longmapsto u = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}$$

1° - Calculer la pente de la tangente à la courbe représentative aux points O ($t = 0$), A ($t = 1$) ainsi que les coordonnées du point d'inflexion I .

2° - Démontrer à l'aide d'un développement en série entière au voisinage de zéro que pour tout point de l'intervalle $[0\ ,\ 0{,}7]$ $f(t)$ est compris entre :

$$P_1(t) = t^2 - \frac{1}{2}t^6 + \frac{3}{8}t^{10} - \frac{5}{16}t^{14} + \frac{35}{128}t^{18} - \frac{63}{256}t^{22}$$

$$\text{et } P_2(t) = P_1(t) + \frac{231}{1024}t^{26}$$

Vérifier numériquement pour $t = 0{,}7$.

3° - Grâce à ces formules encadrer par deux nombres décimaux l'intégrale définie

$$I_1 = \int_0^{0.7} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$$

4° - Dans l'intervalle $[0{,}7\ ,\ 1]$ on pose $t = 1 + z$ et on admet que pour tout point de cet intervalle $f(1+z)$ est compris entre

$$\pi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + z - z^2 + 1{,}25z^4 - 1{,}25z^5 - 0{,}5z^6 + 2{,}25z^7\right)$$

$$\text{et } \pi_2(z) = \pi_1(z) - z^8$$

Vérifier numériquement pour $z = -0{,}3$ (qui correspond à $t = 0{,}7$).
Encadrer par deux nombres décimaux l'intégrale définie

$$I_2 = \int_{0.7}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$$

5° - Donner une estimation décimale de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$

On choisira le nombre des décimales en fonction de la précision de l'encadrement.

II

On considère l'hyperbole (H) ayant pour équation $y = \frac{1}{x}$ relativement à un repère orthonormé Ox , Oy (figure 2) puis sur (H) le point A d'abscisse 1 et le point M_t d'abscisse $\frac{1}{t}$. On fait varier t de 0 à 1 et on note :
ℓ_t la longueur arithmétique de l'arc d'hyperbole joignant A au point M_t ,
λ_t la longueur du segment rectiligne OM_t .

1° - Calculer la dérivée de la fonction $t \longmapsto \lambda_t - \ell_t$ et en déduire :

$$\lambda_t - \ell_t = \sqrt{2} - 2\int_t^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$$

(Eventuellement admettre cette formule).

2° - En utilisant les résultats de la partie I :

a) Montrer que si l'abscisse de M_t tend vers $+\infty$ cette différence tend vers une limite finie que l'on calculera.

b) Calculer la longueur $\ell_{\frac{1}{5}}$ de l'arc joignant sur l'hyperbole le point A au point $M_{\frac{1}{5}}$ d'abscisse 5 .

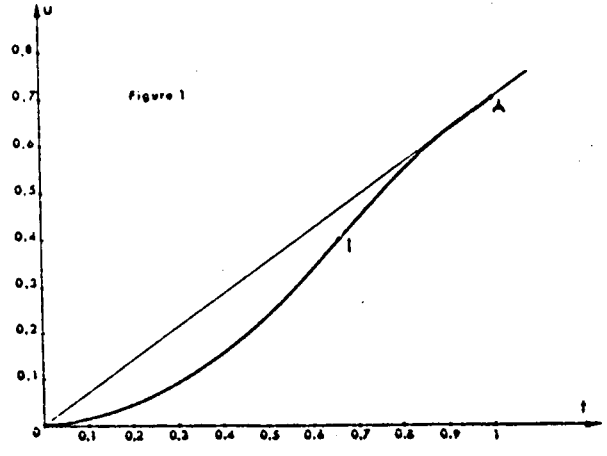

Figure 1

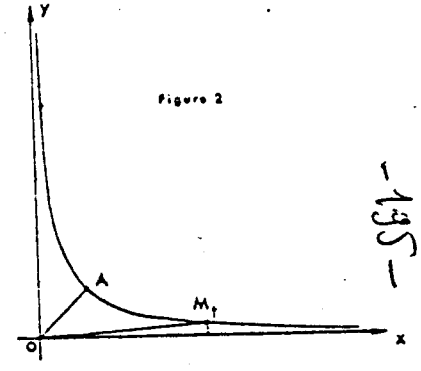

Figure 2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail